

# Grundlagen der Bruchmechanik

**H.-J. Christ**

Institut für Werkstofftechnik  
Universität Siegen

- 1. Einführung**
- 2. Grundbegriffe und Konzepte der Linear-Elastischen Bruchmechanik**
- 3. Beschreibung der Ermüdungsrissausbreitung (Langrisswachstum)**
- 4. Beispiel**

# Aufgabe der Bruchmechanik

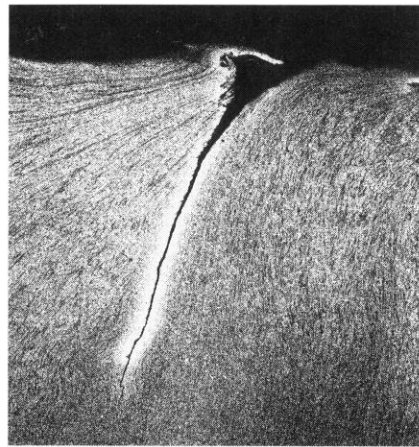
- Wir gehen davon aus, dass im Bauteil bereits ein Riss (oder sonst. Fehlstelle) existiert, Entstehung einer Fehlstelle/eines Risses ist bereits beim Herstellungsprozess möglich.
- Schadenstolerantes Design: berücksichtigt, dass technische Strukturen immer Fehler enthalten.
- Für die Ermüdungsbelastung bedeutet dies: Ein vorhandener Fehler darf in einer vorgegebenen Betriebszeit nicht zum Versagen führen.
- Kontrolliertes Risswachstum – Überwachung – Wartung/Reparatur (Luftfahrtindustrie).
- Klassische Kriterien der Festigkeitsberechnung lassen keine Beurteilung von Rissen zu  $\Rightarrow$  es werden spezielle Bruchkonzepte benötigt.

# Aufgabe der Bruchmechanik (Fortsetzung)

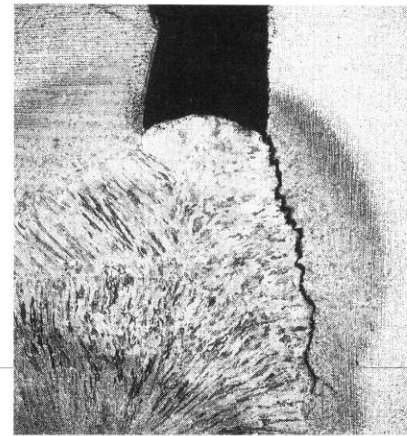
## Typische Aufgaben:

- Bedingungen, unter denen ein Bauteil versagt:  
Ermittlung der kritischen Risslänge, der kritischen Belastung
- Auswahlkriterien für geeignete Werkstoffe
- Berechnung der Lebensdauer bei schwingender Belastung  
(Schadenstoleranzkonzepte)
- Angabe von sinnvollen Inspektionsintervallen auf der Basis des erwarteten Risswachstums
- ...

# Risse infolge von Fertigungseinflüssen oder Betriebsbeanspruchung



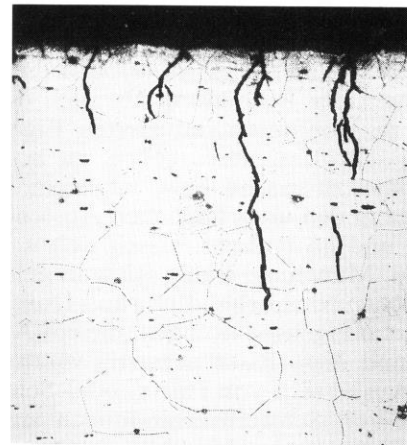
Schmiedefalte



Schweißriß



Härteriß

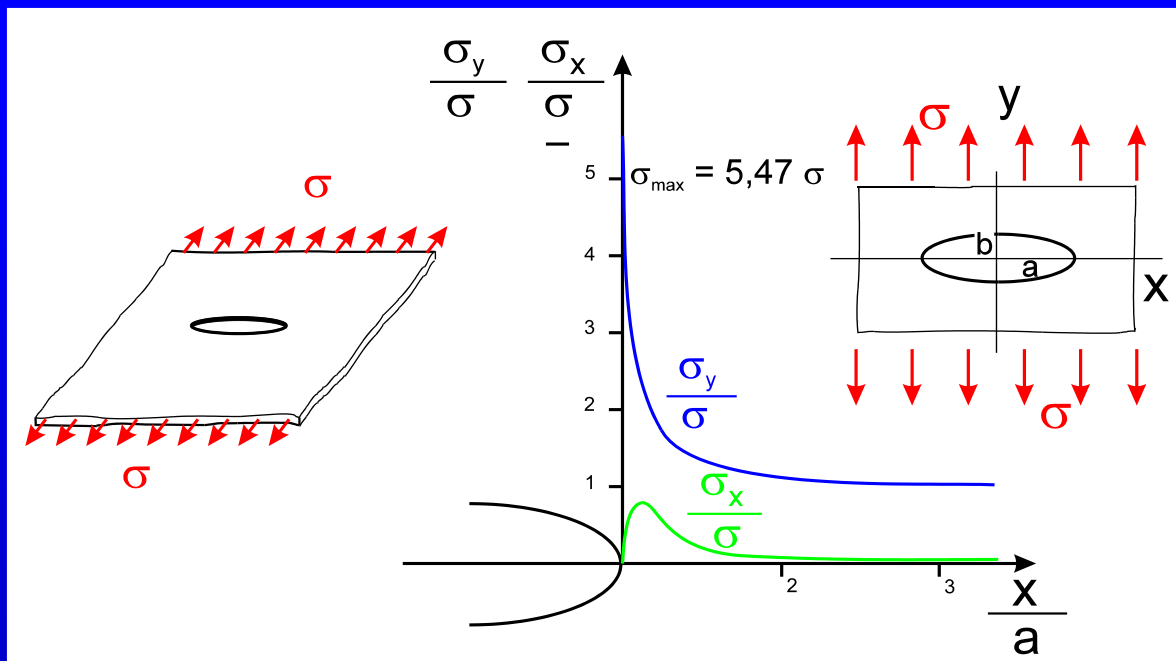


Spannungsrißkorrosion

# Scheibe mit elliptischem Loch

wichtiges Kerbproblem, analyt. Lösung durch *Kolosov* (1909) mit der Methode der komplexen Spannungsfunktionen

- Unendliche große Scheibe unter einachsigen Zug, äußere Spannung  $\sigma$
- *linear-elastisches Material*
- *ellipt. Loch: Halbachsen  $a, b$ , min. Krümmungsradius  $\rho$*



Max. Tangentialspannung:

$$\sigma_{t \max} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right)$$

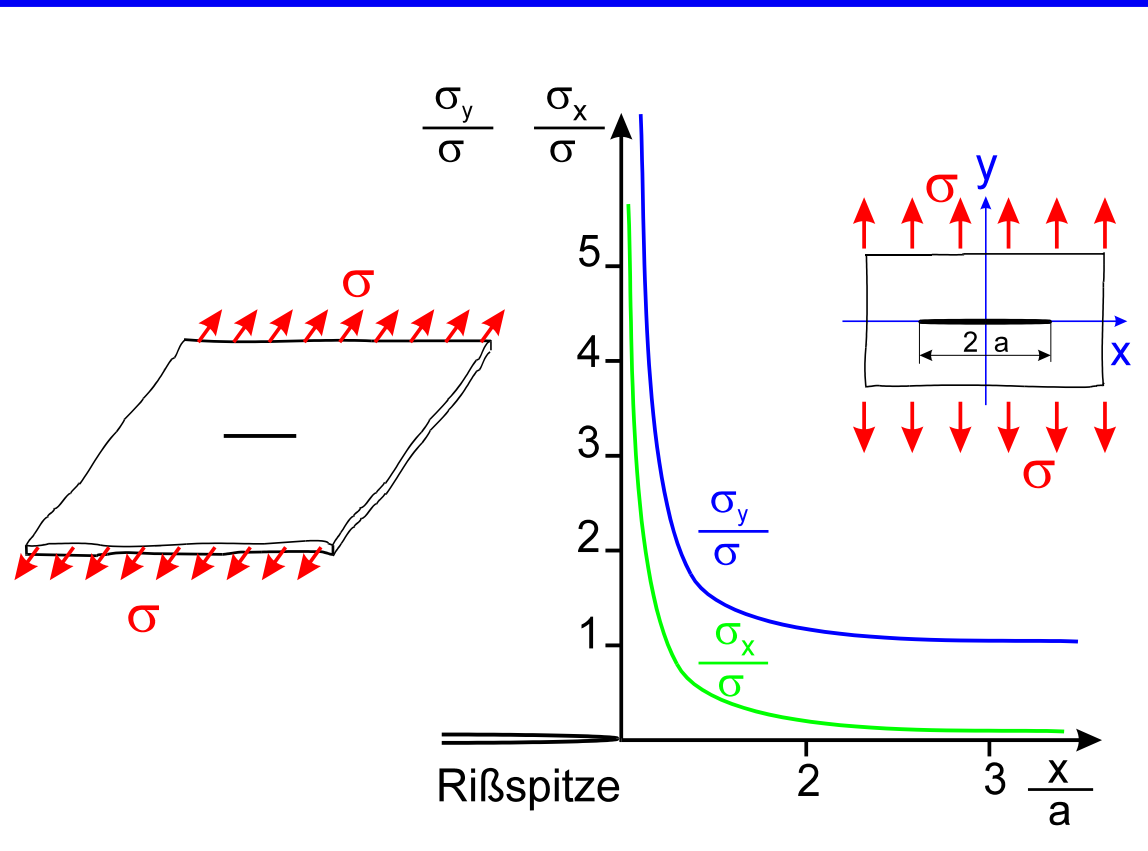
Speziell: Kreisloch  $a=b$ :

$$\sigma_{t \max} = 3\sigma$$

# Rissmodell nach *Griffith* (1921)

Idee: Ellipt. Loch entarten lassen zu schmalem Schlitz,  
d.h. kleine Halbachse  $b \rightarrow 0$  liefert Riss der Länge  $2a$

Spannungen auf der x-  
Achse (Ligament):

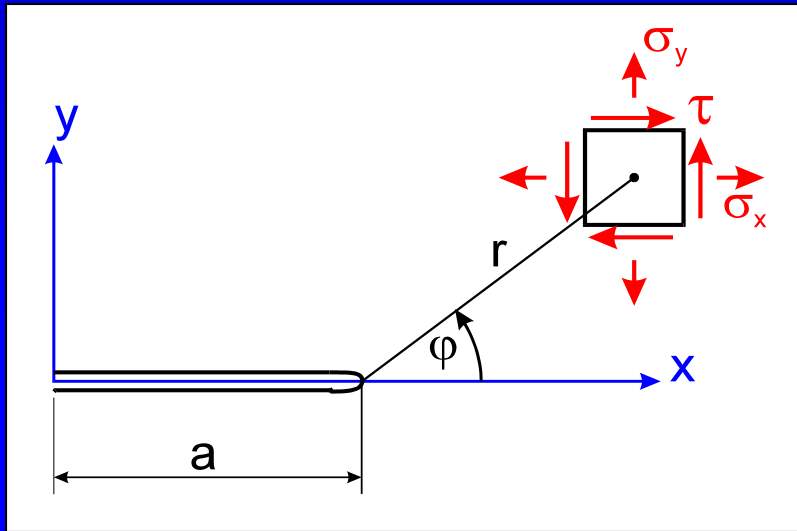


$$\sigma_x = \sigma \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} - \sigma$$

$$\sigma_y = \sigma \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

# Spannungsnahfeld an der Rissspitze



- Ausgangspunkt: Lösung für *Griffith*-Riss
- Übergang auf ein Polarkoordinatensystem an der Rissspitze
- Betrachtung der unmittelbaren Rissspitzenumgebung  
( $r/a \ll 1$  und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung

Nahfeldgleichungen nach *Sneddon* (1946):

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right) - \sigma$$

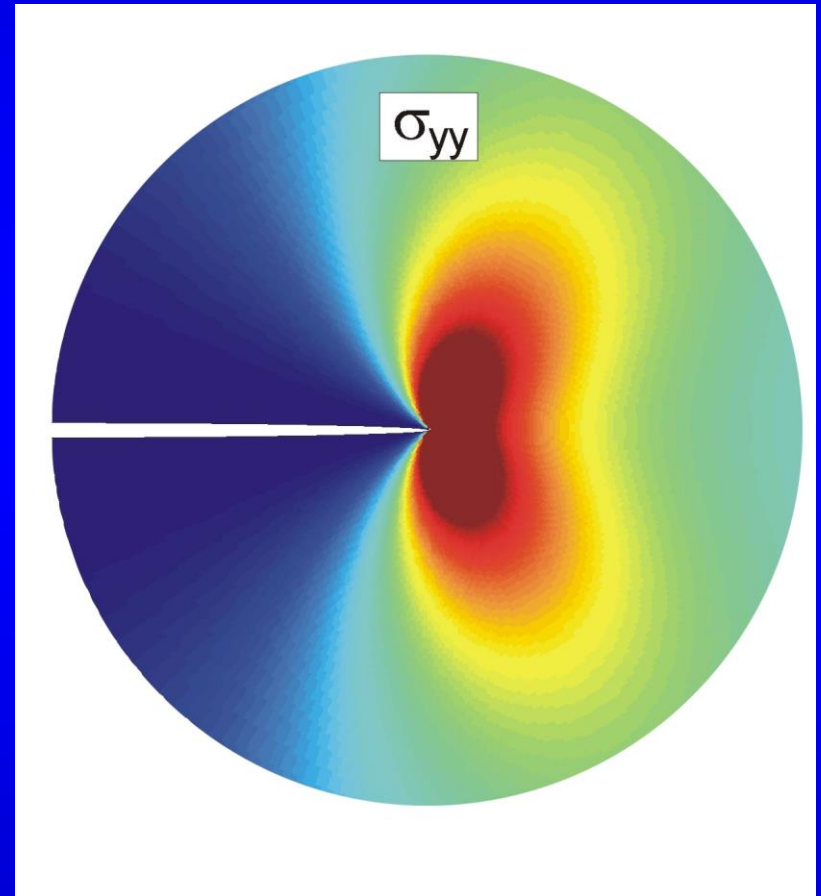
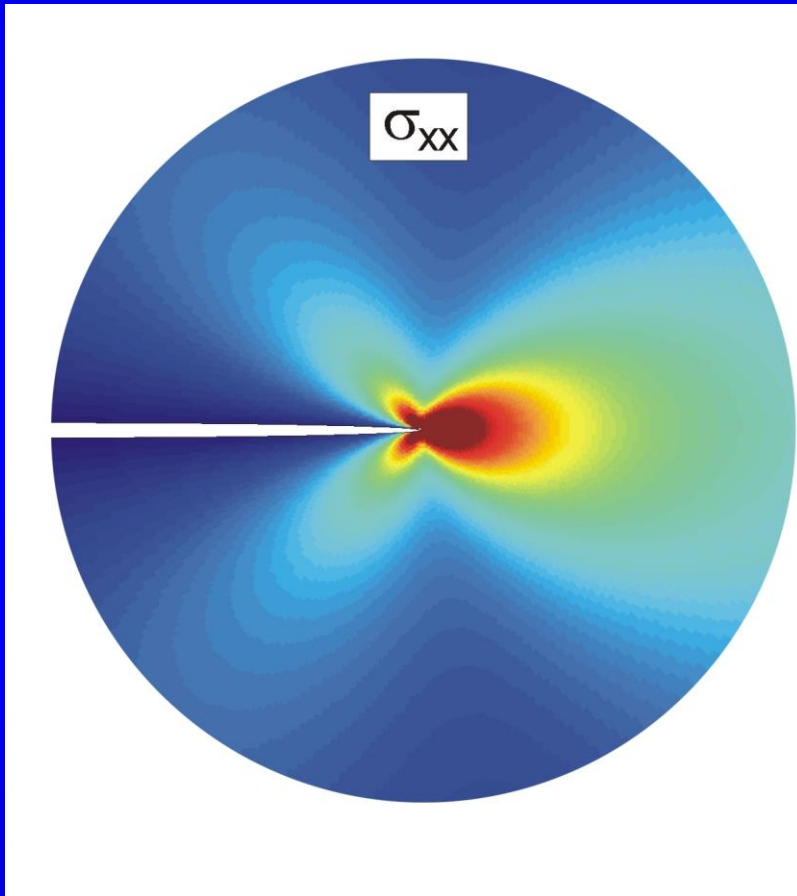
$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right)$$

$$\tau = \tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$$

Man erkennt: für  $r \rightarrow 0$

gehen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rightarrow \infty$

# Normalspannungen in Rissspitzennähe





# Spannungsintensitätsfaktoren (SIF)

Darstellung der Nahfeldgl. in folgender Form

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right)$$
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}\right)$$
$$\tau = \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$$

Es zeigt sich, dass sich auch für andere Geometrien und Belastungen diese charakteristische Form ergibt:

- singuläre r-Abhängigkeit:  $1/\sqrt{r}$
- Winkelfunktion
- $K_I$ : Spannungsintensitätsfaktor (Mode I) ; Konstante, die die Intensität des Spannungsfeldes an der Rissspitze beschreibt

# Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) (Fortsetzung)

Vergleich mit *Sneddon*-Gln. liefert den SIF für den Griffith-Riss :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

Einheit des SIF:

$$MPa \sqrt{mm} = N \text{ mm}^{-\frac{3}{2}} \quad ; \quad MPa \sqrt{mm} = 31,62 \text{ MPa} \sqrt{m}$$

# Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) (Fortsetzung)

Gültigkeit dieser Lösung ist örtlich begrenzt:

- a) von der Rißspitze weg: die vernachlässigten Terme gewinnen dann wieder an Bedeutung
- b) zur Rißspitze hin: Spannungen theoretisch unendlich → reales Material: Spannungsabbau durch inelastisches Materialverhalten



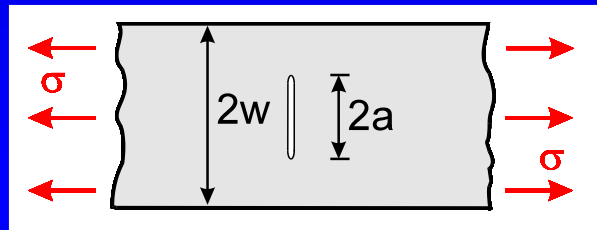
# SIF für andere Geometrien und Lastfälle

Allgemeine Vorgehensweise: dimensionslosen Korrekturterm  $Y_I$  einführen

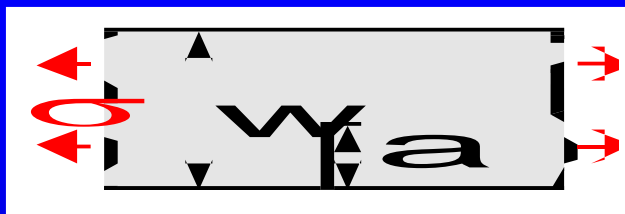
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{w} \right)$$

- $Y_I$  hängt ab von:
  - der Geometrie des ungerissenen Bauteils,
  - Lage, Form und Größe des Risses,
  - der äußeren Belastung (z.B. Zug, Biegung).
- $a$  Risslänge (bzw. halbe Risslänge beim Innenriss)
- $w$  charakteristische Bauteilabmessung
- *Griffith*-Riss:  $Y_I = 1$
- i.A. Lösung experimentell oder numerisch (FEM, BEM)
- z.B.:

# SIF für andere Geometrien und Lastfälle (Fortsetzung)

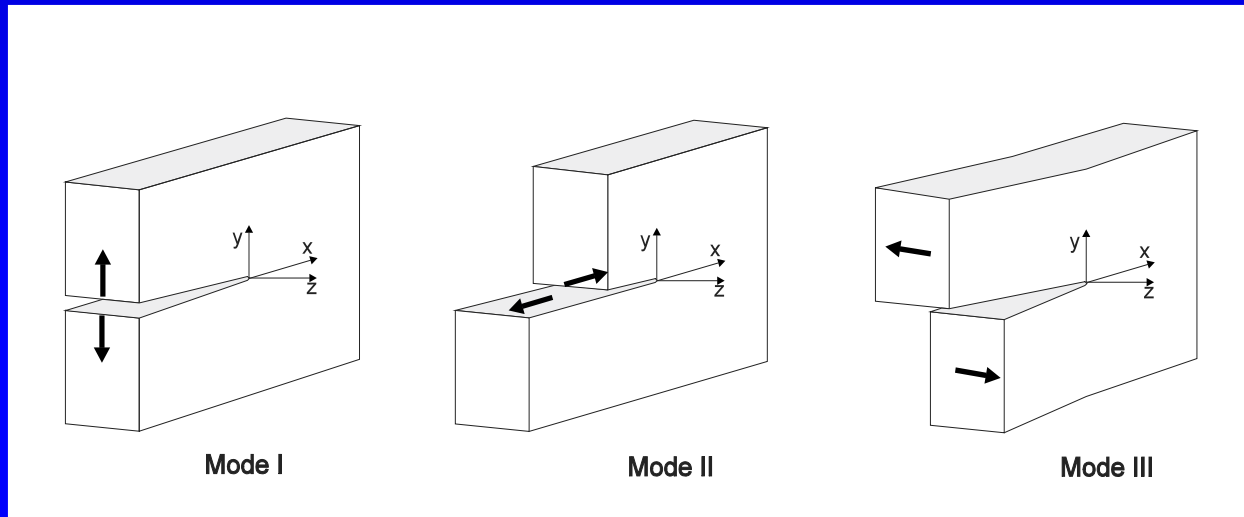


$a/w$	$Y_I(a/w)$
0	1.0
0.2	1.02
0.4	1.11



$a/w$	$Y_I(a/w)$
0	1.12
0.2	1.37
0.4	2.11

# Die elementaren Rissöffnungsarten (Moden)

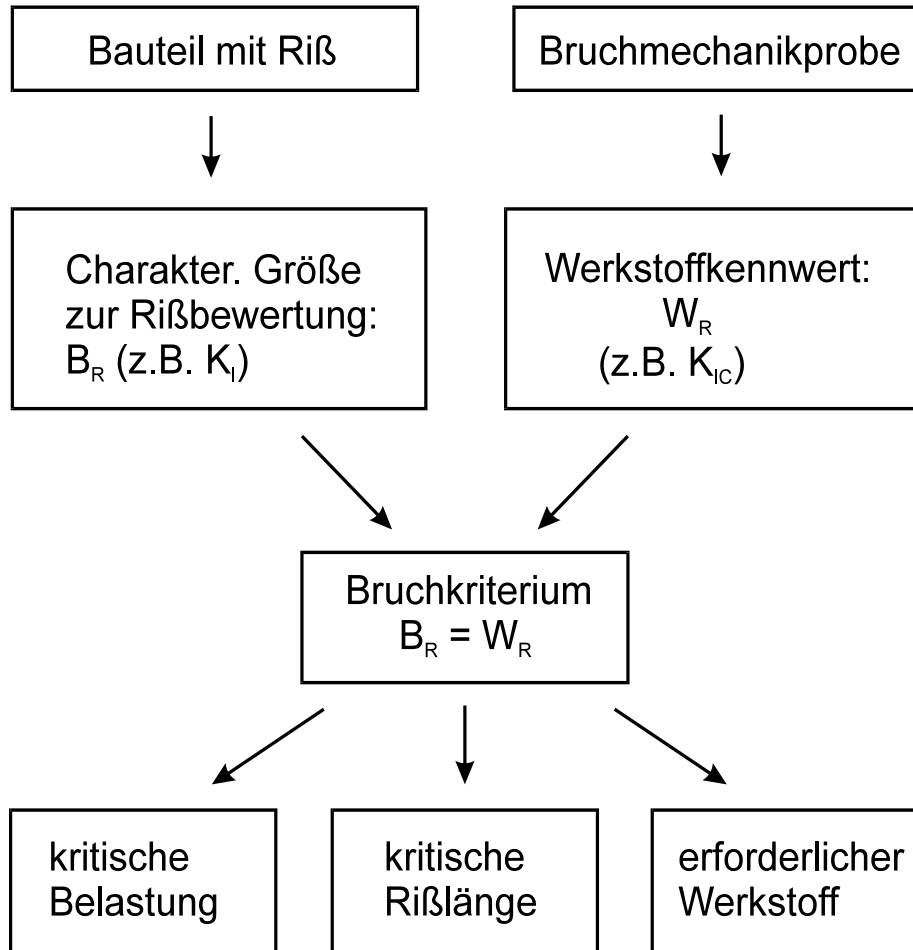


Mode I: symmetrisches Abheben der Rissufer

Mode II: Abgleiten der Rissufer in Rissrichtung (durch ebenen Schub)

Mode III: Abgleiten der Rissufer quer zur Rissrichtung (aufgrund von nicht-ebenem Schub)

# Bruchmechanisches Versagenskonzept



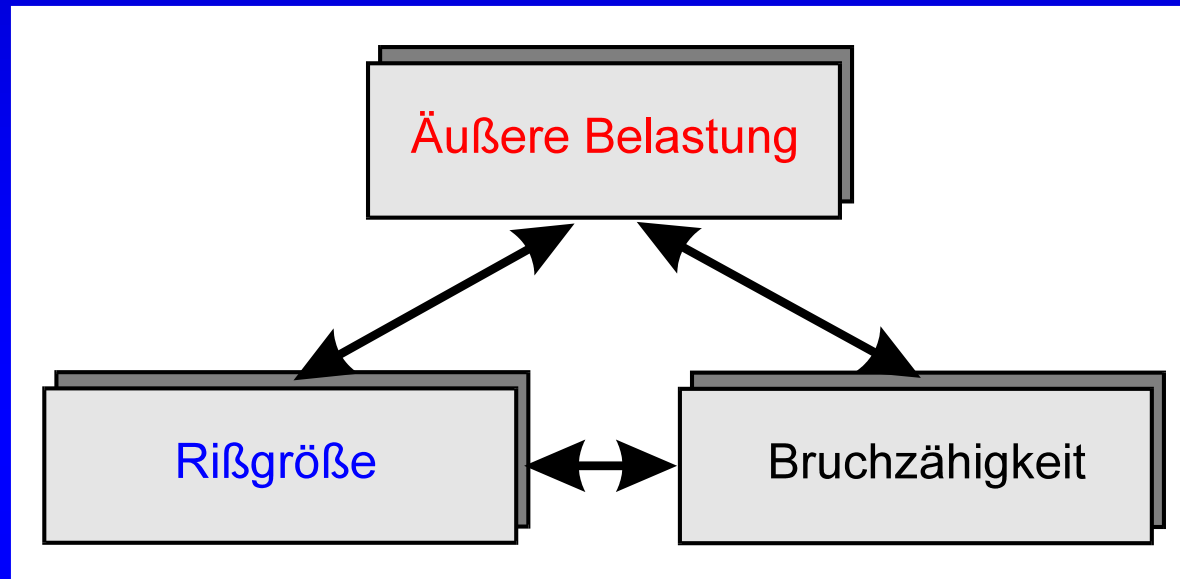
Sprödbbruchkriterium nach Irwin:

$$K_I = K_{Ic}$$

Instabiles Risswachstum setzt ein, wenn der Spannungsintensitätsfaktor einen kritischen Wert erreicht.

- $K_{Ic}$ : - Bruchzähigkeit, Risszähigkeit, kritischer SIF,  
- Werkstoffkennwert, experimentelle Ermittlung  
- je niedriger  $K_{Ic}$  desto größer Sprödbbruchgefahr  
- Einflussgrößen: Temperatur, Belastungsgeschwindigkeit, Spannungszustand

# Folgerungen aus dem Bruchkriterium



- Gegeben: Länge und Ort eines Risses in einem Bauteil (z.B. aus einer Inspektion)
- Gesucht: die kritische Nennlast  $\sigma_c$ , bei der instabiles Rißwachstum entsteht:

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{w} \right)$$

⇒

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{w} \right)}$$



# Folgerungen aus dem Bruchkriterium (Fortsetzung)

## weiterer Fall:

- Gegeben: die äußere Last in Form der Nennspannung  $\sigma$ , z.B. als ständige statische Betriebslast
- Gesucht: *die kritische Risslänge  $a_c$* , ab der instabile Rissausbreitung eintritt:

$$K_{Ic} = \sigma \sqrt{\pi a_c} Y_I \left( \frac{a_c}{w} \right)$$

$\Rightarrow$

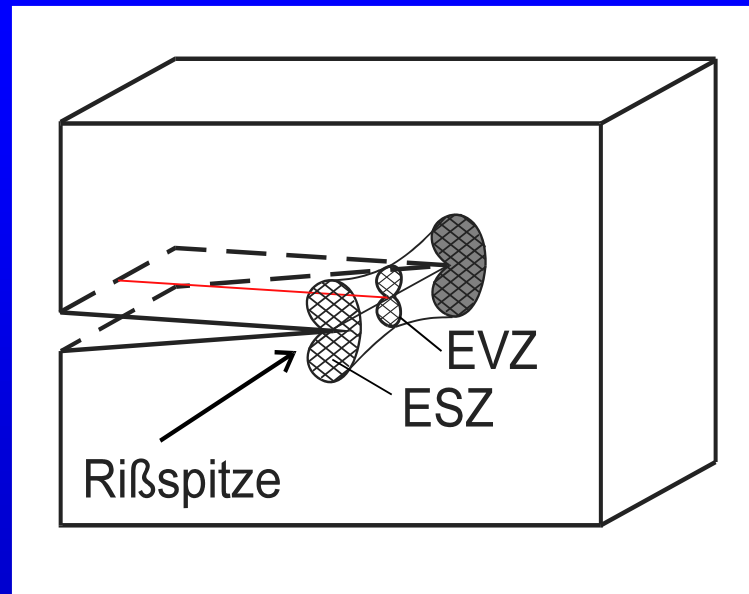
$$a_c = \frac{K_{Ic}^2}{\pi \sigma^2 Y_I^2 \left( \frac{a_c}{w} \right)}$$

# Plastische Zonen an der Rissspitze

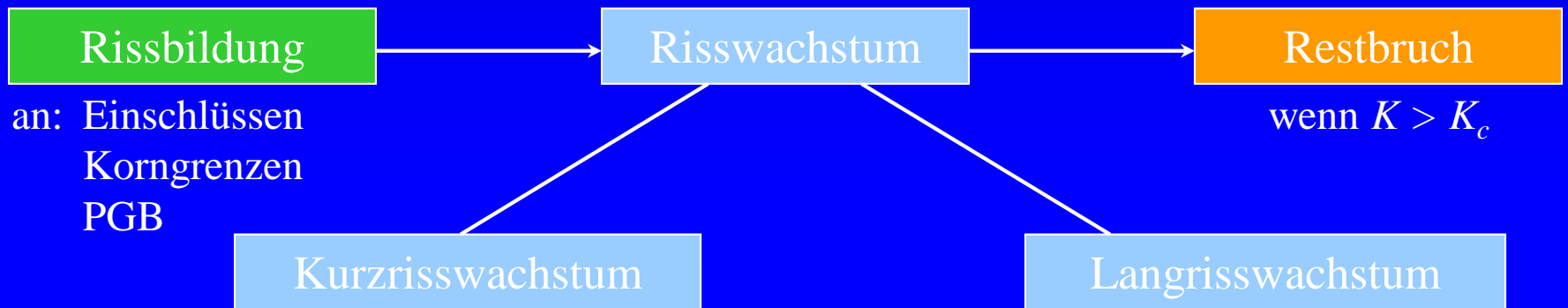
Spannungsabbau durch plastisches Fließen

bei Kleinbereichsfließen wird davon ausgegangen, dass die plastische Zone aufgrund ihrer geringen Ausdehnung das elastische Spannungsfeld nicht grundsätzlich verändert. Der SIF bleibt weiterhin eine bruchbestimmende Größe!

Hundeknochenmodell:

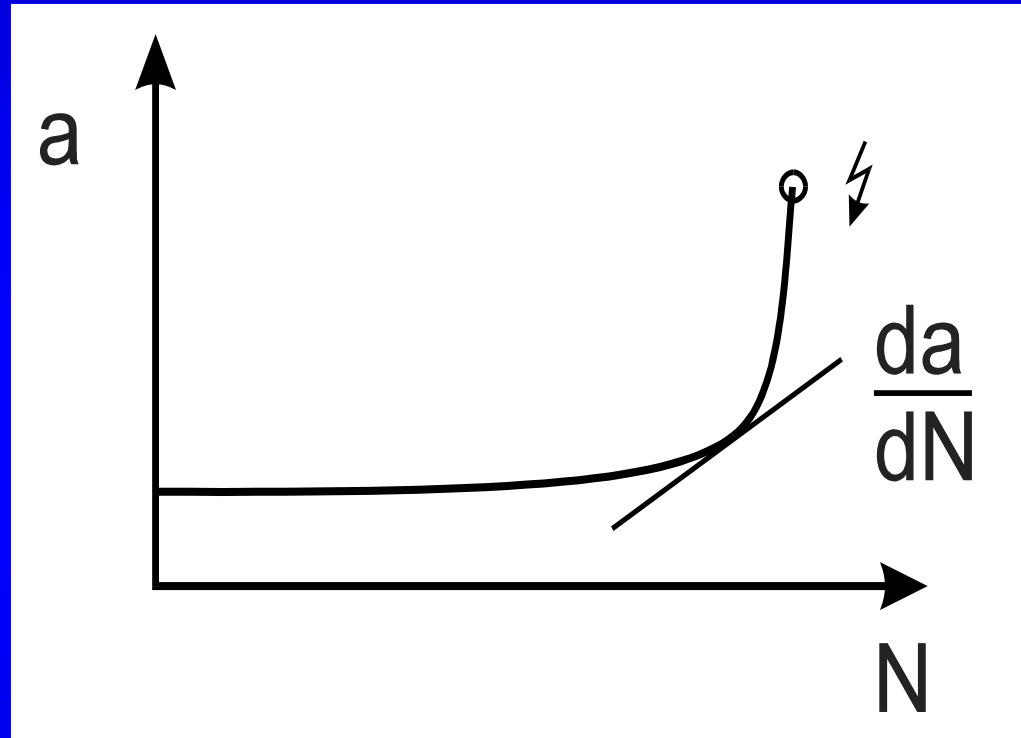


# Ausbreitung von Ermüdungsrissen



PZ klein gegen  $a \Rightarrow$  mit Spannungsintensitätsfaktor  $K$  beschreibbar;

# Risswachstum mit der Lastwechselzahl

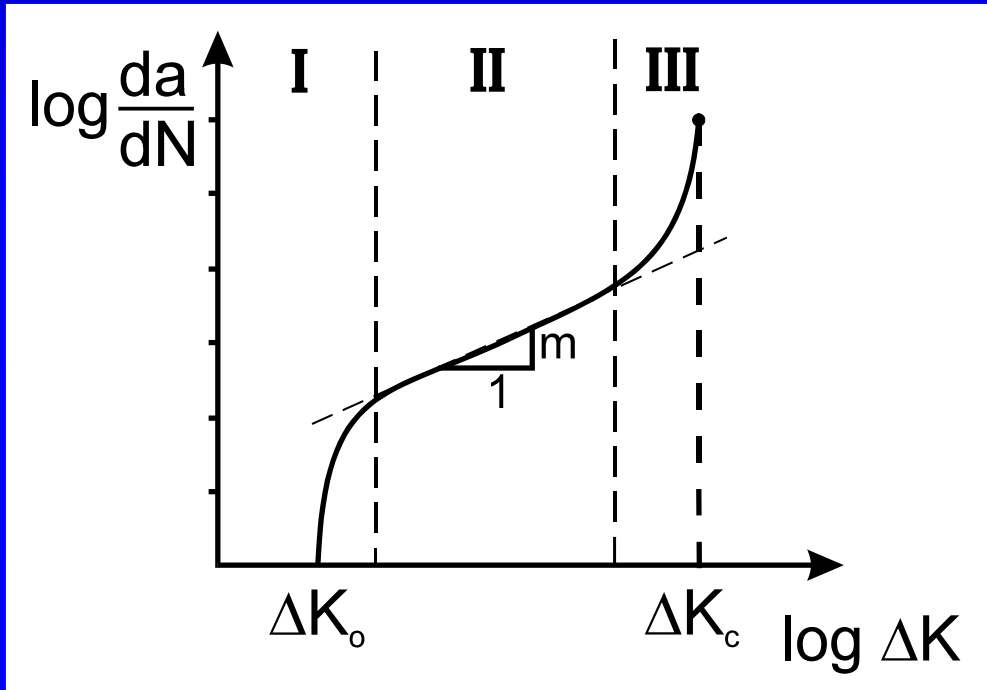


Tangente an die  
 $a$ - $N$ -Kurve ist  
Rissausbreitungs-  
geschwindigkeit

Problem:

Wahl der Inspektionsintervalle, so dass  
man den steilen Anstieg bis zum Bruch  
nicht verpasst

# Rissausbreitungskurve



Empirische Gesetze:

*Paris, Gomez und Anderson*

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_I)^m$$

*Erdogan und Ratwani:*

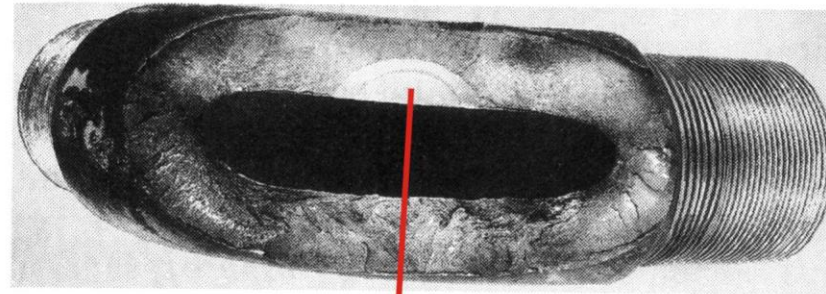
$$\frac{da}{dN} = \frac{C' (\Delta K_I - \Delta K_0)^{m'}}{(1-R) K_c - \Delta K_I}$$

Lebensdauerberechnung:

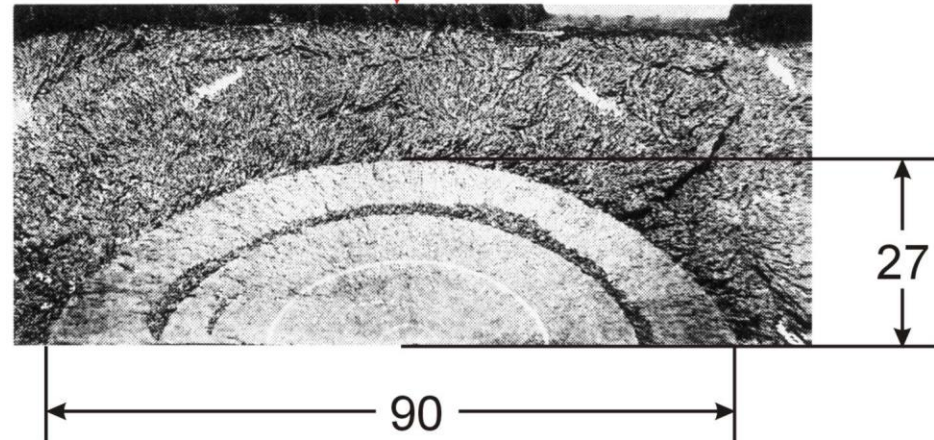
$$N_{\max} = N_1 + \int_{a_1}^{a_c} \frac{1}{f(\Delta K_I(a, \Delta \sigma), R, \dots)} da$$

# Beispiel 1: Geborstener Rohrbogen

Geborstener Rohrbogen:

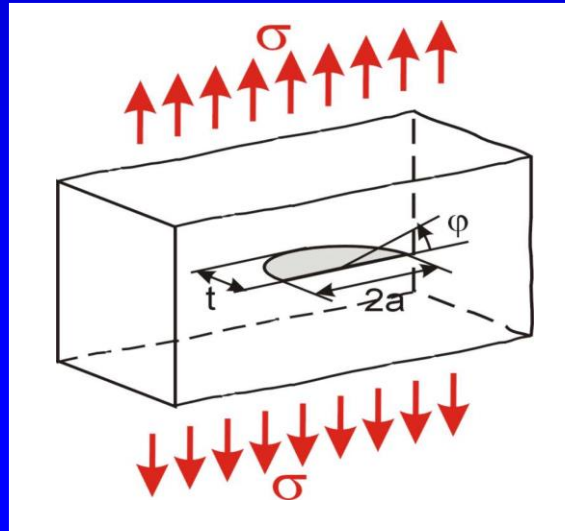


Rissgeometrie an der Bruchstelle:



# Halbelliptischer Oberflächenriss

Lösung nach Irwin

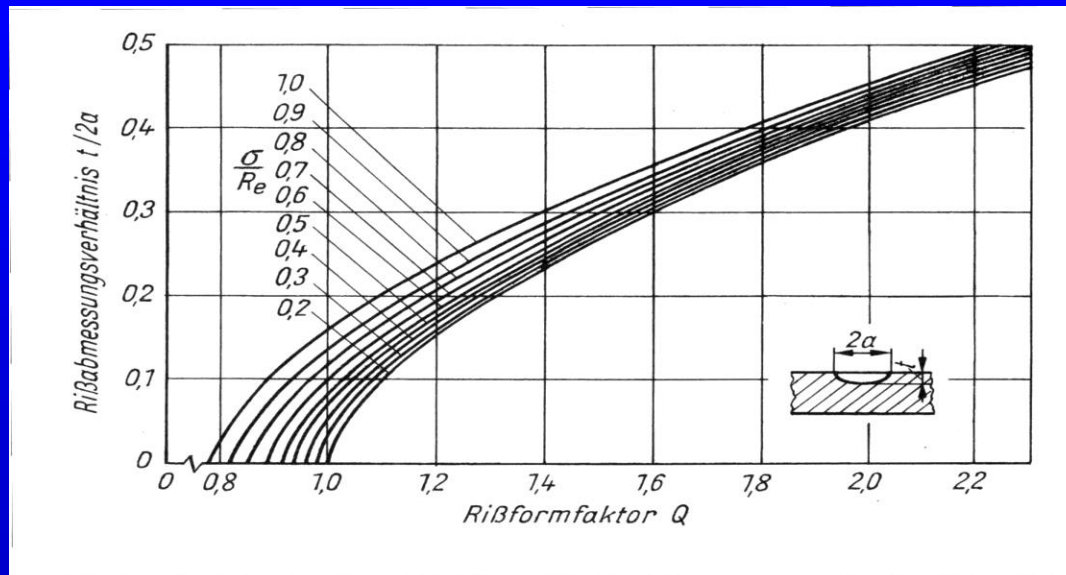


$$K_I = \sigma \sqrt{\pi t} \sqrt{\frac{1,2}{Q}}$$

Q: Rissformfaktor

$$Q = \Phi_0^2 - 0,212 \sqrt{\frac{\sigma}{R_e}}$$

$$\Phi_0 = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( \frac{a^2 - t^2}{a^2} \right) \sin^2 \varphi \right] d\varphi$$



# Halbelliptischer Oberflächenriss

Werkstoffdaten:

warmfester Stahl

$$K_{Ic} = 74 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

$$R_e = 600 \text{ MPa}$$

max. Betriebsspannung:  $\sigma = 280 \text{ MPa}$

Rissgeometrie bei Bruch:  $2a = 90 \text{ mm}$       $t = 27 \text{ mm}$       $\Rightarrow$       $t/2a \approx 0,3$

Rissformfaktor: aus Diagramm mit  $\frac{\sigma}{R_e} \approx 0,5$       $\Rightarrow$       $Q \approx 1,55$

SIF: 
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi t} \sqrt{\frac{1,2}{Q}} \approx 72 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

Bruchkriterium:  $K_I = K_{Ic}$  Näherungsweise erfüllt!

Elliptischer Riss hat die instabile Rissausbreitung ausgelöst.